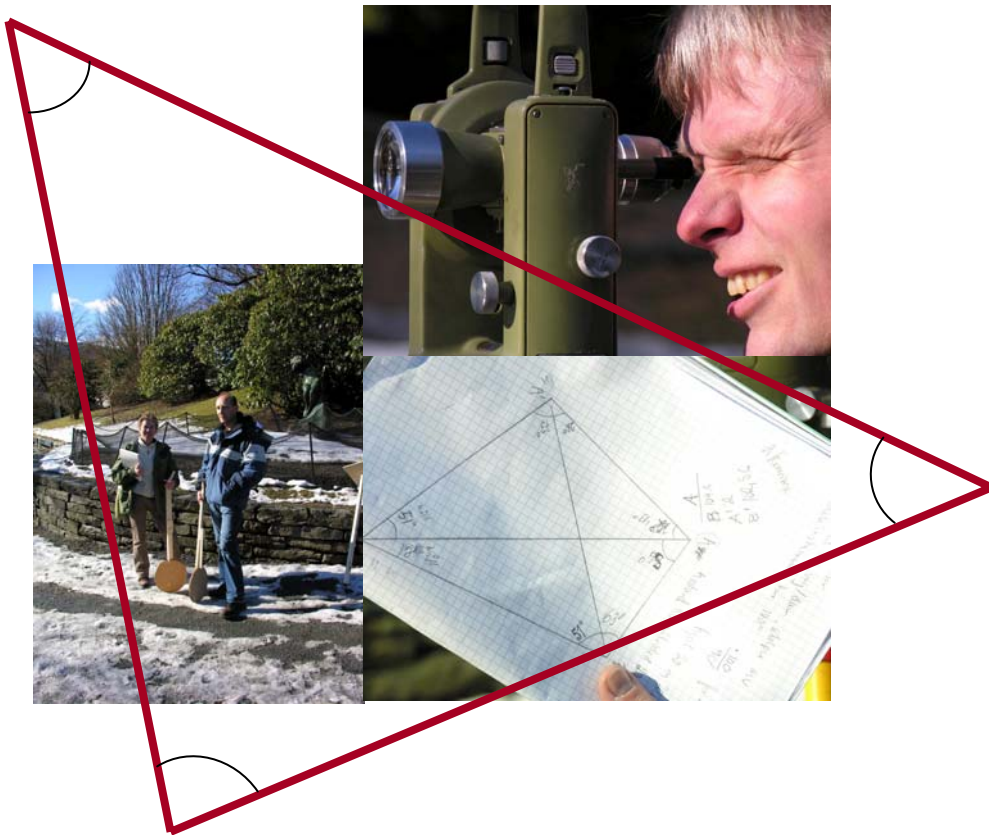


Trigonometri



Stoffet er hentet fra

Paralleller

2MX bind 1

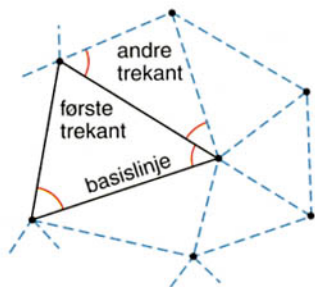
Trond Ekern, Øyvind Guldahl, Erik Holst
NKI Forlaget

Kompendium SKM102
Matematikk i grunnskolen II
Skolelaboratoriet i realfag
Universitetet i Bergen

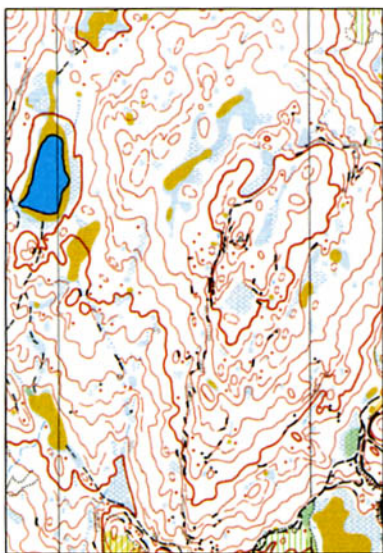


Innledning

Trigonometri betyr trekantmåling og blir brukt i mange praktiske sammenhenger. For å kunne produsere kart er det viktig å kjenne den nøyaktige posisjonen til *trigonometriske punkter*. Slike punkter ligger gjerne på toppen av åser og fjell, slik at det er fritt utsyn mellom dem. Landskapet er delt inn i et trekantnett av trigonometriske punkter. Over punktene er det vanligvis malt hvite kors som er synlige på lang avstand.



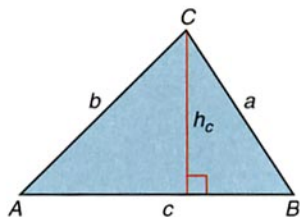
Dersom vi kjenner en side og to vinkler i en trekant, kan vi regne ut de to andre sidene ved hjelp av trigonometri. Lengden av en *basislinje* mellom to trigonometriske punkter blir nøyaktig målt. En rett strekning langs jernbaneskinnene mellom Oslo og Eidsvoll er den opprinnelige norske basislinja. Når vi måler vinklene i en trekant der basislinja er den ene sida, kan vi regne ut de to andre sidene. Sidene i en trekant som ligger inntil den første, kan da beregnes dersom vi måler to av vinklene. Ved videre vinkelmålinger kan så hele trekantnettet bestemmes. For å regne ut avstandene mellom de trigonometriske punktene trenger vi derfor bare én avstandsmåling i tillegg til vinkelmålinger.



Ved kartproduksjon er tradisjonell oppmåling, der vinkelmålingene ble gjort med kikkert, i dag erstattet av elektronikk- og satellittteknologi. Fra 1985 ble Navstar-GPS-satellittene tatt i bruk av Statens kartverk, og en kan nå bestemme posisjoner svært nøyaktig. GPS står for «Global Positioning System» og er et satellittbasert navigasjonssystem som blir brukt til en rekke sivile og militære formål. Skal vi kunne utvikle og forstå slik avansert teknologi, er det nødvendig med grundige matematikkunnskaper.

Arealsetningen

En *høyde* i en trekant er et linjestykke som går fra et hjørne i trekanten og vinkelrett ned på den motstående sida. Den sida som høyden står vinkelrett på, kaller vi *grunnlinja*.



Lar vi c være grunnlinja i trekanten ABC på figuren, er h_c høyden. Arealet T av trekanten er da

$$T = \frac{1}{2}gh = \frac{1}{2}ch_c$$

Høyden h_c deler trekanten ABC i to rettvinklede trekanter. I en rettvinklet trekant er sinus til en vinkel lik forholdet mellom motstående katet og hypotenusen. Når vi ser på den rettvinklede trekanten til venstre, får vi

$$\sin A = \frac{h_c}{b}$$

$$h_c = b \cdot \sin A$$

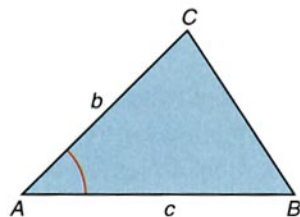
som gir

$$T = \frac{1}{2}ch_c = \frac{1}{2}cb \cdot \sin A$$

Vi kan også skrive arealet som

$$T = \frac{1}{2}ac \cdot \sin B \quad \text{og} \quad T = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C$$

Arealet er halvparten av produktet av to sider og sinus til vinkelen mellom de to sidene.

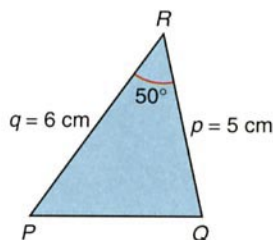


Arealet av en trekant er gitt ved *arealsetningen*:

$$T = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A$$

der b og c er lengdene av to sider i trekanten, mens A er vinkelen mellom dem.

EKSEMPEL



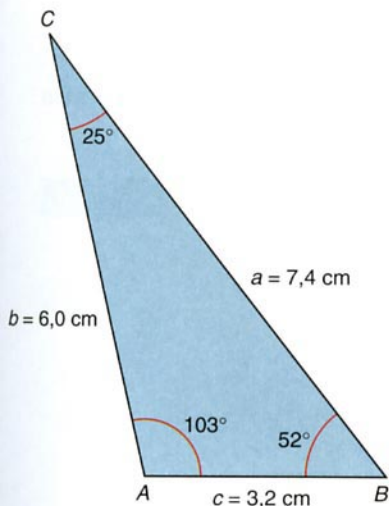
I trekanten PQR på figuren er $\angle R = 50^\circ$, $PR = 6$ cm og $RQ = 5$ cm. Finn arealet T .

Løsning:

Vi finner arealet ved hjelp av arealsetningen:

$$T = \frac{1}{2}pq \cdot \sin R = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \sin 50^\circ = 11,5$$

Arealet er $11,5 \text{ cm}^2$.



Sinussetningen

I trekanten til venstre har vi målt de tre sidene med linjal og vinklene med vinkelmåler. For hver vinkel regner vi ut forholdet mellom sinus til vinkelen og lengden av den motstående sida. Vi får

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin 103^\circ}{7,4} = 0,1317,$$

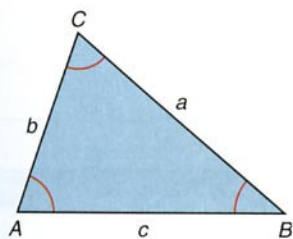
$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin 52^\circ}{6,0} = 0,1313, \quad \frac{\sin C}{c} = \frac{\sin 25^\circ}{3,2} = 0,1321$$

Når vi tar hensyn til usikkerhet i målingene, ser det ut til at de tre brøkene er like store. Prøver vi med andre trekanter, får vi tilsvarende resultater.

I en trekant er det et konstant forhold mellom sinus til en vinkel og lengden av motstående side:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

Denne regelen kaller vi *sinussetningen*.



Vi kan bevise sinussetningen.

Arealet av en trekant ABC kan skrives på tre måter:

$$\frac{1}{2}bc \cdot \sin A = \frac{1}{2}ac \cdot \sin B = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C$$

Vi dividerer med $\frac{1}{2}abc$ og får

$$\frac{\frac{1}{2}bc \cdot \sin A}{\frac{1}{2}abc} = \frac{\frac{1}{2}ac \cdot \sin B}{\frac{1}{2}abc} = \frac{\frac{1}{2}ab \cdot \sin C}{\frac{1}{2}abc}$$

som gir

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

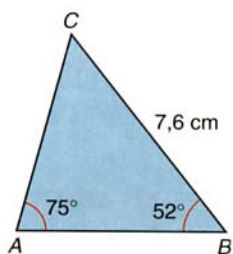
Vi kan også skrive sinussetningen slik:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Når vi skal finne en ukjent vinkel ved hjelp av sinussetningen, er det enklest å bruke den øverste formen, mens den nederste formen er greiest å bruke når vi skal finne en ukjent side.

Dersom $\frac{a}{b} = \frac{s}{t}$,
er $\frac{b}{a} = \frac{t}{s}$.

EKSEMPEL



Finn sida AC i trekanten på figuren.

Løsning:

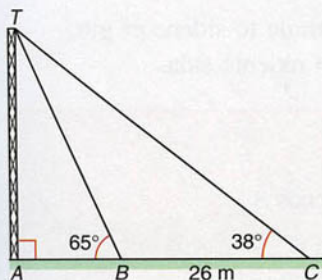
Vi bruker sinussetningen og får

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sin A} &= \frac{b}{\sin B} \\ \frac{b}{\sin 52^\circ} &= \frac{7,6}{\sin 75^\circ} \\ b &= \frac{7,6 \sin 52^\circ}{\sin 75^\circ} = 6,2 \end{aligned}$$

Sida AC har lengden 6,2 cm.

EKSEMPEL

På en horisontal flate ligger punktene A, B og C på en rett linje. Se figuren øverst på neste side. En vertikal mast i A er festet med to vajer som går fra toppen T av masta til B og C. Avstanden $BC = 26$ m, $\angle ABT = 65^\circ$ og $\angle ACT = 38^\circ$. Finn lengdene av de to vajerne og høyden på masta.



Løsning:

Vi regner først ut vinklene TBC og BTC :

$$\angle TBC = 180^\circ - \angle ABT = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$$

$$\angle BTC = 180^\circ - (\angle TBC + \angle BCT) = 180^\circ - (115^\circ + 38^\circ) = 27^\circ$$

Vi kjenner nå alle vinklene og en av sidene i trekanten BCT .

De andre sidene finner vi ved hjelp av sinussetningen:

$$\frac{BT}{\sin \angle BCT} = \frac{CT}{\sin \angle TBC} = \frac{BC}{\sin \angle BTC}$$

Vi setter inn de kjente verdiene og får

$$\frac{BT}{\sin 38^\circ} = \frac{CT}{\sin 115^\circ} = \frac{26}{\sin 27^\circ}$$

Vi regner først ut BT :

$$\frac{BT}{\sin 38^\circ} = \frac{26}{\sin 27^\circ}$$

$$BT = \frac{26 \sin 38^\circ}{\sin 27^\circ} = 35,3$$

Så finner vi CT :

$$\frac{CT}{\sin 115^\circ} = \frac{26}{\sin 27^\circ}$$

$$CT = \frac{26 \sin 115^\circ}{\sin 27^\circ} = 51,9$$

Lengdene av de to vajerne er $BT = 35$ m og $CT = 52$ m.

Vi finner høyden AT av masta ved å se på trekanten ABT , som er rettvinklet:

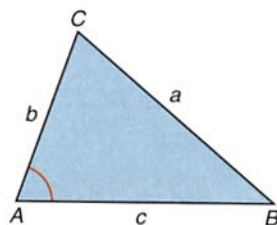
$$\sin \angle ABT = \frac{AT}{BT}$$

$$AT = BT \sin \angle ABT = 35,3 \sin 65^\circ = 32,0$$

Masta har høyden 32 m.

Cosinussetningen

I trekanter der to sider og vinkelen mellom de to sidene er gitt, bruker vi *cosinussetningen* for å finne den ukjente sida.



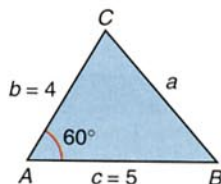
I en trekant ABC har vi

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

Denne regelen kaller vi *cosinussetningen*.

Beviset for setningen finner du på side 37.

EKSEMPEL



I trekanten ABC er $b = 4$, $c = 5$ og $\angle A = 60^\circ$.
Finn sida a .

Løsning:

Vi bruker cosinussetningen og setter inn de gitte verdiene:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \\ &= 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ \\ &= 16 + 25 - 40 \cdot 0,50 \\ &= 21 \\ a &= \sqrt{21} = 4,6 \end{aligned}$$

Pytagoras' setning

Dersom $\angle A$ er en rett vinkel, er $\cos A = 0$. Da blir det siste leddet i cosinussetningen lik null, og vi får $a^2 = b^2 + c^2$, altså Pytagoras' setning. Vi kan derfor si at Pytagoras' setning er et spesialtilfelle av cosinussetningen. Cosinussetningen kalles derfor også *den utvidete Pytagoras-setningen*.

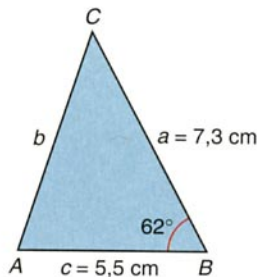
Råd om trekantberegninger

Når vi skal regne ut ukjente sider og vinkler i trekanter, får vi vanligvis oppgitt tre størrelser, for eksempel to sider og en vinkel.

Her følger noen råd:

- 1 Tegn en trekant som passer til opplysningene.
- 2 Ikke bruk Pytagoras' setning dersom trekanten ikke er rettvinklet.
- 3 Når vi kjenner to sider og den mellomliggende vinkelen, bruker vi ofte cosinussetningen.
- 4 Når vi kjenner én side og den motstående vinkelen, bruker vi ofte sinussetningen.
- 5 Vær oppmerksom på at noen trekantoppgaver har to løsninger.

EKSEMPEL



I trekanten ABC er $a = 7,3$ cm, $c = 5,5$ cm og $\angle B = 62^\circ$. Finn den ukjente sida b og de ukjente vinklene $\angle A$ og $\angle C$.

Løsning:

Vi tegner trekanten og fører på de gitte opplysningene. Av figuren ser vi at det bare er en løsning for denne trekanten. Vi kan finne side b ved å bruke cosinussetningen:

$$\begin{aligned}
 b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B \\
 &= 7,3^2 + 5,5^2 - 2 \cdot 7,3 \cdot 5,5 \cdot \cos 62^\circ \\
 &= 53,29 + 30,25 - 80,3 \cdot 0,4695 \\
 &= 45,84 \\
 b &= \sqrt{45,84} = 6,77
 \end{aligned}$$

Sida b er 6,8 cm.

Vi kan nå finne $\angle A$ ved hjelp av sinussetningen:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

$$\sin A = \frac{a \sin B}{b} = \frac{7,3 \sin 62^\circ}{6,77} = 0,9521$$

$$\angle A = 72^\circ$$

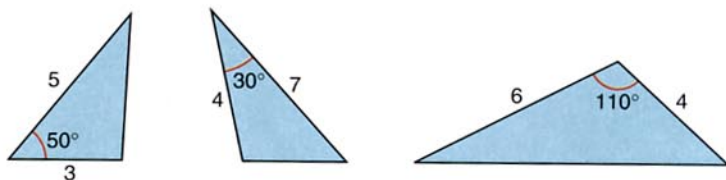
Til slutt finner vi $\angle C$ ved å bruke vinkelsummen i en trekant:

$$\angle C = 180^\circ - (72^\circ + 62^\circ) = 46^\circ$$

ØVINGSOPPGAVER

1.2.1

Regn ut arealet av trekantene:



1.2.2

Finn sida BC i trekanten ABC når

- $AB = 8$ cm, $\angle A = 50^\circ$ og $\angle C = 70^\circ$
- $AC = 11$ cm, $\angle A = 30^\circ$ og $\angle B = 110^\circ$

1.2.3

Finn ukjente sider og vinkler i trekanten ABC , der

- $\angle A = 66^\circ$, $\angle C = 44^\circ$ og $BC = 7$ cm
- $\angle B = 85^\circ$, $\angle C = 35^\circ$ og $AC = 9$ cm

1.2.4

I den likebeinte trekanten ABC er $AC = BC$, $AB = 23$ cm og $\angle A = 25^\circ$.

- Finn $\angle C$.
- Finn lengden av sida AC .

1.2.5

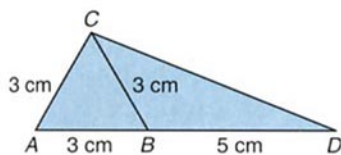
I trekanten ABC er $AB = 19$ m, $AC = 14$ m og $\angle C = 112^\circ$.

- Finn $\angle A$.
- Regn ut arealet av trekanten.

1.2.6

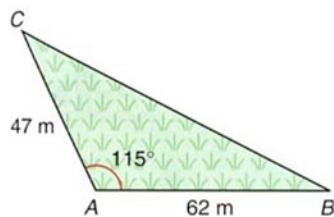
I trekanten ABC er $AB = 5$ cm, $AC = 6$ cm og $\angle C = 24^\circ$.

- Tegn en skisse av trekanten.
- Forklar hvorfor $\angle B$ kan ha to ulike verdier.
- Finn disse verdiene.

**1.2.7**

Figuren viser en likesidet trekant ABC , der alle sidene er 3 cm lange. D ligger på linja gjennom AB , slik at $BD = 5$ cm.

Finn lengden av CD .

**1.2.8**

Figuren viser en lekeplass.

- Finn lengden av BC .
- Finn arealet av lekeplassen.

1.2.9

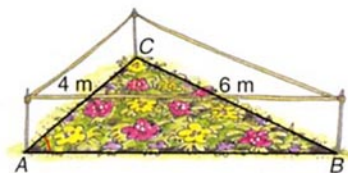
En trekant har sider med lengdene 5 cm, 6 cm og 7 cm.

- Hvor stor er den minste vinkelen?
- Finn arealet av trekanten.

1.2.10

En landskapsarkitekt skal lage et blomsterbed med form som trekanten på figuren. Han avgrensner området med en snor som er 18 m lang.

- Finn $\angle A$.
- Finn arealet av blomsterbedet.

**1.2.11**

I trekantoppgaver får vi gjerne tre opplysninger. Hvordan kan vi gå fram for å finne ukjente sider og vinkler i trekanten ABC når vi kjenner

- a, b og c
- b, c og $\angle B$
- b, c og $\angle A$



Mer om sinussetningen

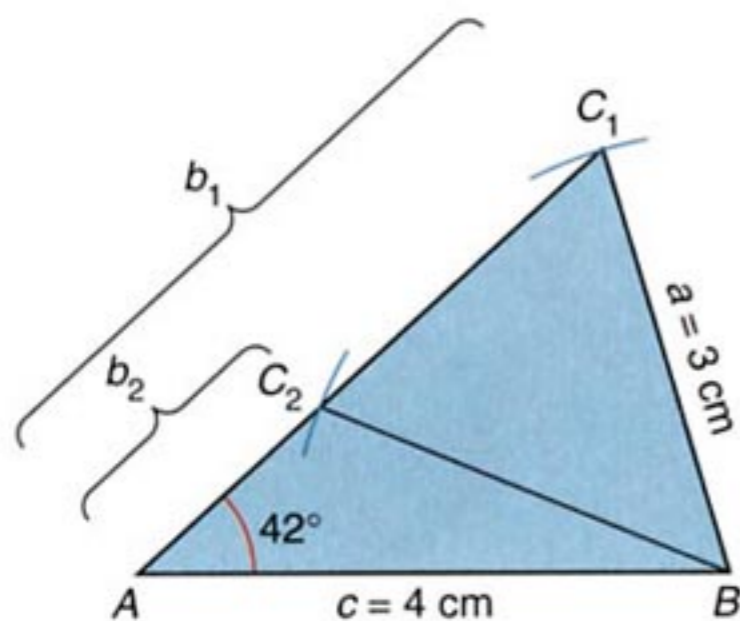
Når vi skal finne ukjente størrelser i en trekant og har fått oppgitt to sider og en vinkel som ikke ligger mellom de to sidene, kan det være to trekanter som passer til opplysningene i oppgaven. Det kan også hende at oppgaven ikke har noen løsning.

EKSEMPEL

I trekanten ABC er $\angle A = 42^\circ$, $a = 3$ cm og $c = 4$ cm. Finn $\angle B$, $\angle C$ og b .

Løsning:

Vi tegner først en skisse av trekanten. Vi setter av $AB = 4$ cm og tegner $\angle A = 42^\circ$. Bruk gjerne vinkelmåler. Fra B til C skal det være 3 cm. Vi plasserer da passerspissen i B og slår en sirkel med radius 3 cm. Nå ser vi at det kan være to punkter på det andre vinkelbeinet til $\angle A$ som ligger i avstanden 3 cm fra B . Vi får altså to løsninger for punktet C .



Fordi vi har oppgitt $\angle A$, a og c , regner vi først ut $\angle C$ ved hjelp av sinussetningen:

$$\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a}$$

$$\sin C = \frac{c \sin A}{a} = \frac{4 \sin 42^\circ}{3} = 0,8922$$

Lommeregneren gir løsningen $C_L = \sin^{-1}(0,8922) = 63^\circ$.

Vi vet at to vinkler som ligger symmetrisk om andreaksen på en enhetssirkel, har lik sinusverdi. I denne oppgaven er det to løsninger for $\angle C$:

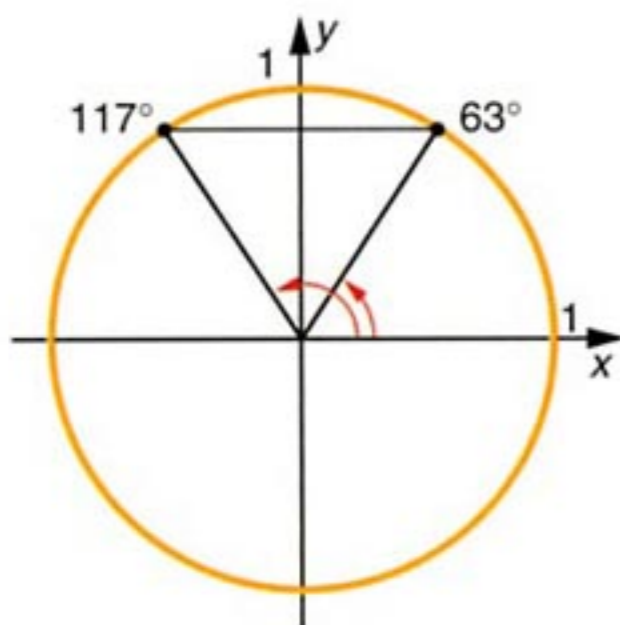
$$\angle C_1 = \angle C_L = 63^\circ$$

$$\angle C_2 = 180^\circ - \angle C_L = 180^\circ - 63^\circ = 117^\circ$$

Vinkelsummen i en trekant er 180° . De tilhørende B -vinklene blir derfor

$$\angle B_1 = 180^\circ - (42^\circ + 63^\circ) = 75^\circ$$

$$\angle B_2 = 180^\circ - (42^\circ + 117^\circ) = 21^\circ$$



Vi finner de tilhørende b -sidene ved å bruke sinussetningen:

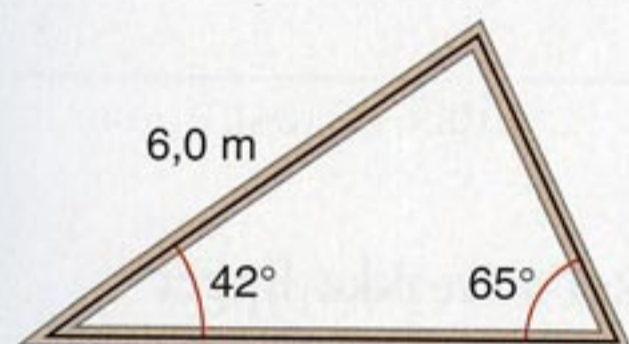
$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$$

$$b_1 = \frac{a \sin B_1}{\sin A} = \frac{3 \sin 75^\circ}{\sin 42^\circ} = 4,3$$

$$b_2 = \frac{a \sin B_2}{\sin A} = \frac{3 \sin 21^\circ}{\sin 42^\circ} = 1,6$$

I den ene trekanten som passer til opplysningene, er $\angle B_1 = 75^\circ$, $\angle C_1 = 63^\circ$ og $b_1 = 4,3$. I den andre trekanten er $\angle B_2 = 21^\circ$, $\angle C_2 = 117^\circ$ og $b_2 = 1,6$.

ØVINGSOPPGAVER



1.2.12

Figuren viser målene på en takstol (en bærekonstruksjon for tak). Finn lengdene av de to ukjente sidene.

1.2.13

I et parallelogram er to av sidene 15 cm lange, og de to andre har lengden 11 cm. Vinkelen mellom to av sidene er 115° . Hvor lange er de to diagonalene i parallelogrammet?

1.2.14

Langviseren på en rådhusklokke er 95 cm lang. Kortviseren måler 68 cm.

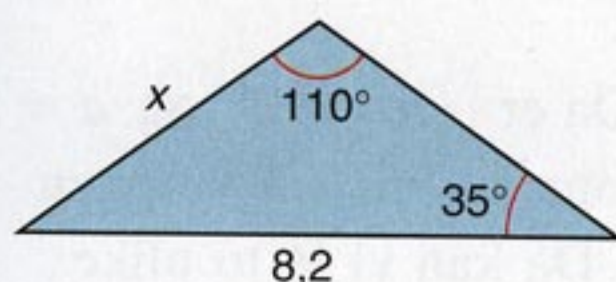
- Hvor stor er vinkelen mellom viserne når klokka er åtte?
- Hvor stor avstand er det da mellom viserspissene?

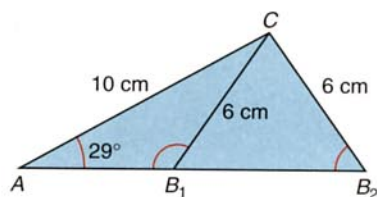
1.2.15

Et reklameskilt har form som en trekant. Sidene i trekanten er 30 cm, 40 cm og 50 cm. Hvor store er vinklene i de tre hjørnene?

1.2.16

Finn lengden x på figuren.



**1.2.17**

I trekanten ABC er $\angle A = 29^\circ$, $AC = 10$ cm og $BC = 6$ cm. Som figuren viser, gir disse opplysningene to mulige trekkanter.

- Bruk sinussetningen til å finne $\angle B_1$ og $\angle B_2$.
- Finn de tilhørende verdiene av $\angle C$ og sida AB .

1.2.18

Finn ukjente sider og vinkler i trekanten ABC når $\angle A = 22^\circ$, $AC = 12$ cm og $BC = 6$ cm.

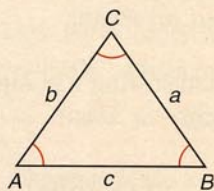
1.2.19

I trekanten ABC er $\angle A = 30^\circ$ og $AC = 10$ cm. BC er også gitt. Tegn skisse av trekanten, finn $\angle B$ og lengden av AB . Avgjør om oppgaven har to, en eller ingen løsning dersom side BC er

- 4 cm
- 5 cm
- 6 cm
- 11 cm

Arealsetningen

Arealet av en trekant ABC er gitt ved



$$T = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A$$

Sinussetningen

I en trekant er det et konstant forhold mellom sinus til en vinkel og lengden av motstående side:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

Cosinussetningen

I en trekant ABC har vi

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

REPETISJONSOPPGAVER

R 1.1

Løs likningene når $x \in [0^\circ, 360^\circ)$:

- $3 \sin x = 2$
- $\cos x = -0,75$
- $\tan x = 3,5$
- $2 \sin^2 x - 3 \sin x - 2 = 0$
- $(3 \sin x - 1)(\cos x + 2) = 0$
- $3 \sin x = 5 \cos x$

R 1.2

I en trekant ABC er $AB = 6,0$ cm, $BC = 4,0$ cm og $\angle A = 30^\circ$. Regn ut $\angle C$.

R 1.3

I trekanten PQR er $\angle R = 53^\circ$. Arealet A av trekanten er gitt ved $A = 12 \cdot \sin 53^\circ$.

Arealet er målt i kvadratcentimeter.

- Velg *ett* sett av verdier for lengden av PR og lengden av QR som gir arealet ovenfor. Bruk disse verdiene i resten av oppgaven.
- Hva blir lengden av PQ ?
- Finn lengden av høyden på PQ .

(2 MX, våren 2002, privatister)

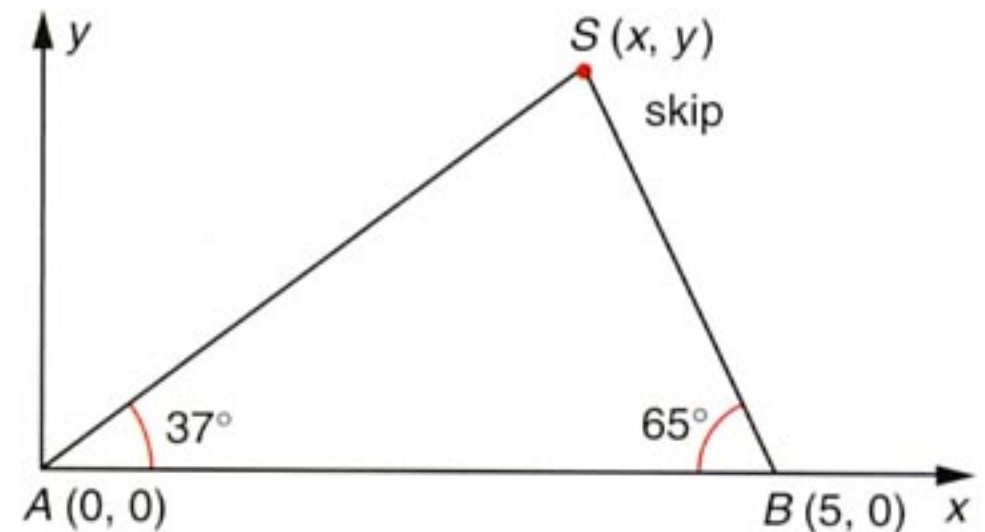
R 1.4

I en trekant ABC er $AB = 6,7$, $AC = 5,6$ og $\angle A = 110^\circ$.

- Regn ut vinklene og sida BC i trekanten.
- Regn ut arealet av trekanten.
- Finn avstanden fra A til sida BC .

(2 MX, høsten 2001)

R 1.5



Et skip S er observert fra to punkter, A og B . Bruk opplysningene på figuren til å bestemme skipets koordinater. Alle avstandene er i kilometer.

(2 MX, våren 2001)

R 1.6

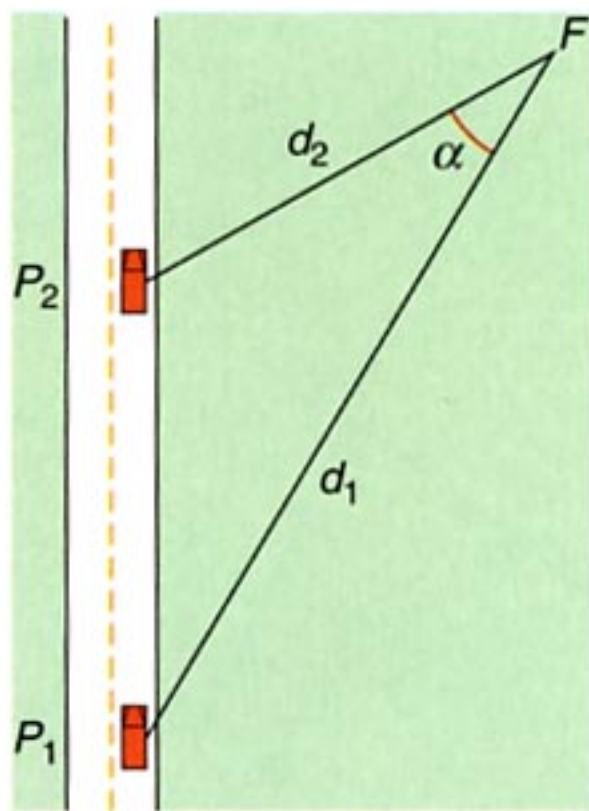
I trekanten ABC er $\angle C = 113^\circ$, $AC = 8,0$ og $BC = 10,0$.

- Finn sida AB og $\angle A$.
- Regn ut arealet av trekanten.
- Finn avstanden fra A til den rette linja som går gjennom B og C .

(2 MX, høsten 2000)

R 1.7

På en veistrekning der fartsgrensen er 50 km/h, blir det gjort en fartsmåling. Bilene blir observert når de passerer punktene P_1 og P_2 . Avstandene d_1 og d_2 og vinkelen α blir lest av på et måleapparat som er plassert i punktet F . Figuren øverst på neste side viser situasjonen sett ovenfra, men er ikke tegnet i målestokk. Tida t som bilene bruker på strekningen mellom P_1 og P_2 , blir målt.



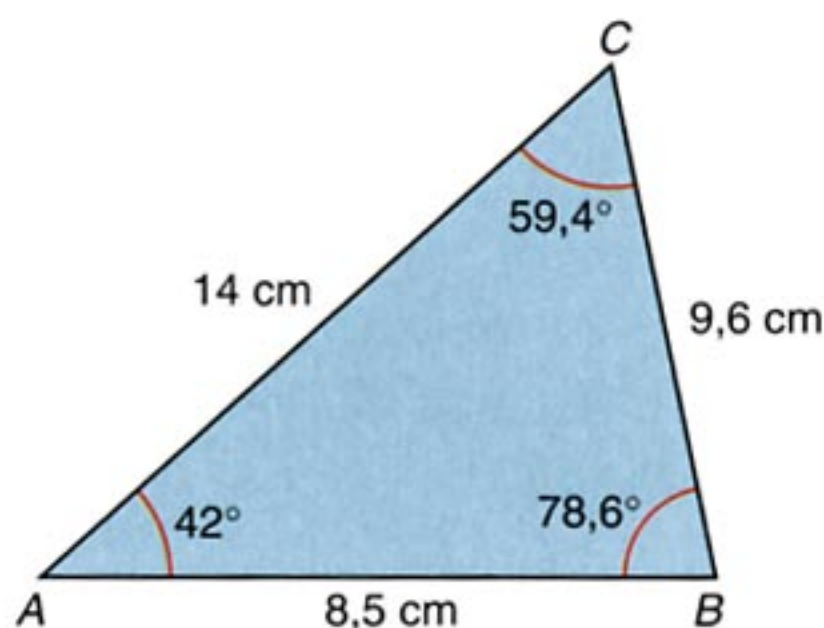
I et bestemt tilfelle ble måleresultatene slik:

$$\begin{aligned} d_1 &= 43 \text{ m} & \alpha &= 30^\circ \\ d_2 &= 25 \text{ m} & t &= 1,6 \text{ s} \end{aligned}$$

Undersøk om sjåføren av denne bilen bryter fartsgrensen på strekningen mellom P_1 og P_2 .

(2 MX, våren 2000)

R 1.8



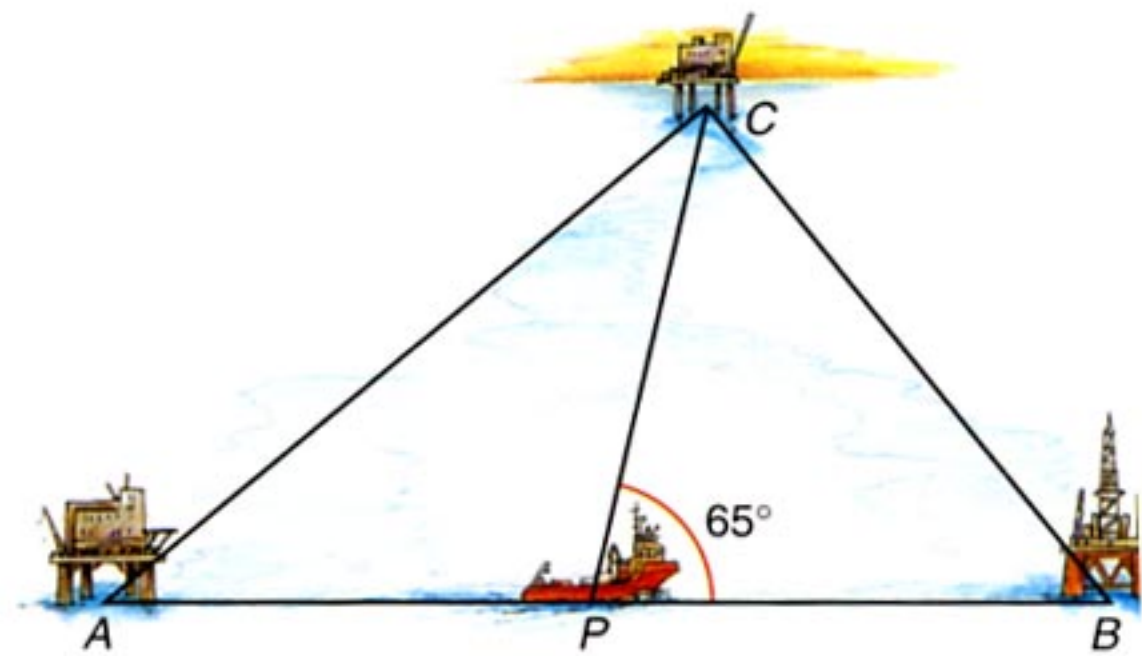
Per og Kari samarbeider om denne matematikkoppgaven: «I trekanten ABC er $\angle A = 42^\circ$ og $AC = 14 \text{ cm}$. Arealet av trekanten er 40 cm^2 . Regn ut ukjente sider og vinkler i trekanten.» Per er kommet fram til løsningen som du ser på figuren. Kari mener at denne løsningen er feil.

a) Hvordan kan hun overbevise Per om at han har regnet feil?

b) Finn den riktige løsningen på oppgaven.

(2 MX, høsten 1999)

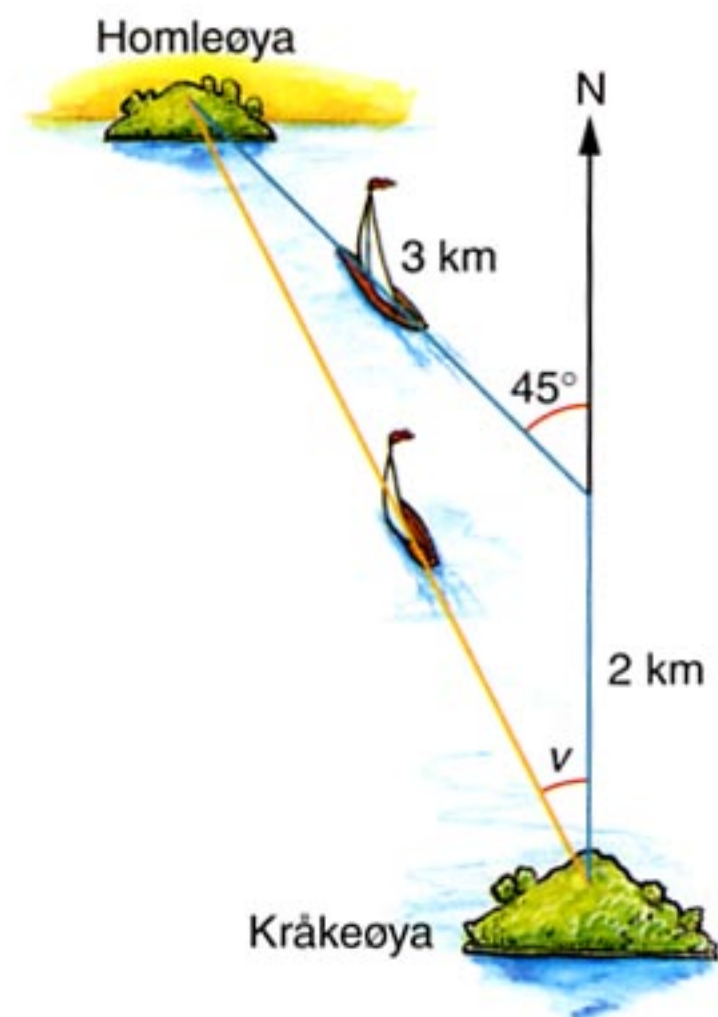
R 1.9



Et skip seiler mellom tre oljeplattformer, A , B og C . På en tur fra A til B mottar skipet i punkt P et signal fra C . Siktelinja PC danner da en vinkel på 65° med kursen PB . Avstandene mellom plattformene er målt til $AB = 7,2 \text{ km}$, $AC = 5,1 \text{ km}$ og $BC = 4,2 \text{ km}$. Se figuren. Hvor langt fra plattform B er skipet når det mottar signalet?

(2 MX, høsten 1999)

R 1.10

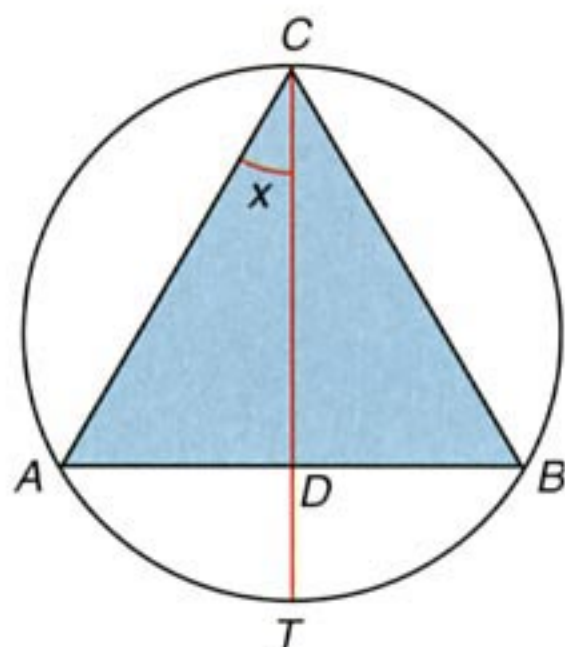


En båt legger fra kai på Kråkeøya og seiler 2 km rett nordover. Deretter bøyer den av mot

nordvest og seiler 3 km med stødig kurs mot Homleøya. Se figuren foran. En mindre båt seiler korteste vei fra Kråkeøya til Homleøya.

- Hvor langt seiler den minste båten?
 - Hva er kursen (vinkel v) til den minste båten?
- (2 MX, våren 1998)

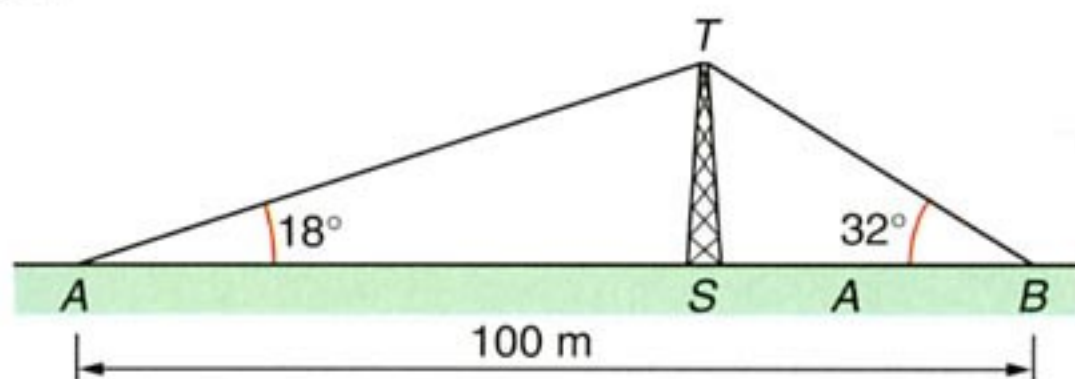
R 1.11



CT er diameteren i en sirkel med radius lik 2. Trekanten ABC , der $AC = BC$, er innskrevet i sirkelen. Vinkelen mellom CT og CA kaller vi x . CD står vinkelrett på AB , og $\angle CAT = 90^\circ$. Se figuren.

- Vis at $AC = 4 \cos x$.
 - Finn AB og CD uttrykt ved x .
- (2 MX, våren 1997)

R 1.12



En vertikal mast ST er plassert på en horisontal mark mellom punktene A og B . Finn høyden på masta når $\angle SAT = 18^\circ$, $\angle SBT = 32^\circ$ og avstanden $AB = 100$ m.

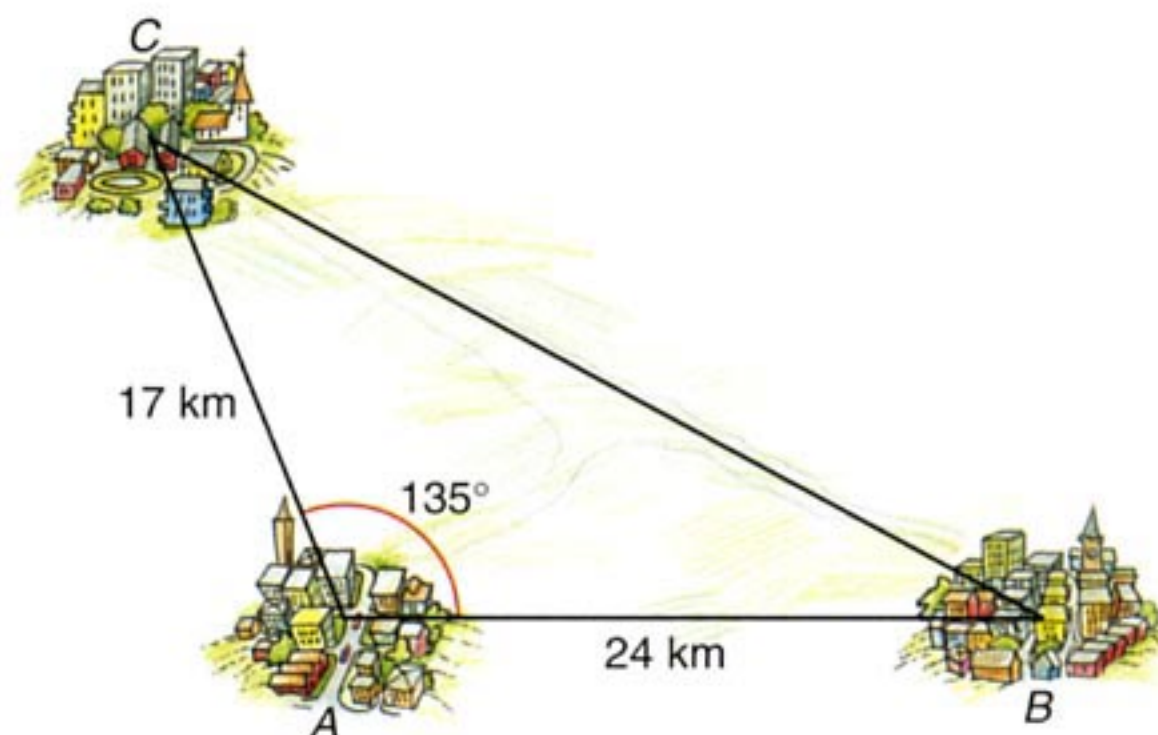
(2 MX, våren 1996)

R 1.13

Når vi bruker sinussetningen for å finne ukjente vinkler i vilkårlige trekanter, hender det noen ganger at vi får to mulige løsninger.

Ta for deg en trekant ABC , der $AB = 7,0$ cm og $\angle A = 35^\circ$. Drøft ulike verdier som BC kan ha, slik at trekanten får ingen, en eller to løsninger.

R 1.14



Vanntilførselen mellom tre byer, A , B og C , skal forbedres. Avstanden fra A til B er 24 km, avstanden fra A til C er 17 km, og $\angle BAC = 135^\circ$. Se figuren. En hovedvannledning går mellom byene B og C .

- Hvor lang er avstanden BC ?

Det er planer om å legge en tilførselsledning fra BC til A .

- Regn ut den korteste avstanden fra BC til A .

R 1.15

I trekanten ABC er $AB = 4,2$ cm, $AC = 7,1$ cm og $\angle A = 70,0^\circ$.

- Regn ut BC , $\angle B$ og $\angle C$.

Halveringslinja for $\angle C$ skjærer AB i D .

- Finn CD .

Fasit

1.1.22

- a) $x = 30^\circ \vee x = 150^\circ$
 b) $x = 60^\circ \vee x = 300^\circ$
 c) $x = 210^\circ \vee x = 330^\circ$
 d) $x = 120^\circ \vee x = 240^\circ$
 e) $x = 60^\circ \vee x = 240^\circ$
 f) $x = 120^\circ \vee x = 300^\circ$

1.1.23

- a) $x = 60^\circ \vee x = 270^\circ \vee x = 300^\circ$
 b) $x = 71,6^\circ \vee x = 108,4^\circ \vee$
 $x = 251,6^\circ \vee x = 288,4^\circ$
 c) $x = 60^\circ \vee x = 120^\circ \vee$
 $x = 240^\circ \vee x = 300^\circ$
 d) $x = 19,5^\circ \vee x = 160,5^\circ \vee$
 $x = 194,5^\circ \vee x = 345,5^\circ$
 e) $x = 0^\circ \vee x = 60^\circ \vee x = 300^\circ$
 f) $x = 23,6^\circ \vee x = 156,4^\circ$

1.1.24

- a) $\tan v = -0,75$ b) $\tan v = \frac{1}{\sqrt{3}}$

1.1.25

- a) $x = 40^\circ$ c) $x = 5^\circ$
 b) $x = 10^\circ$

1.2.1

$$A = 5,7, \quad A = 7, \quad A = 11,3$$

1.2.2

- a) $BC = 6,5 \text{ cm}$ b) $BC = 5,9 \text{ cm}$

1.2.3

- a) $\angle B = 70^\circ, AB = 5,3 \text{ cm},$
 $AC = 7,2 \text{ cm}$
 b) $\angle A = 60^\circ, AB = 5,2 \text{ cm},$
 $BC = 7,8 \text{ cm}$

1.2.4

- a) $\angle C = 130^\circ$ b) $AC = 12,7 \text{ cm}$

1.2.5

- a) $\angle A = 24,9^\circ$ b) $A = 56 \text{ m}^2$

1.2.6

- c) $\angle B = 29,2^\circ \vee \angle B = 150,8^\circ$

1.2.7

$$CD = 7 \text{ cm}$$

1.2.8

- a) $BC = 92 \text{ m}$ b) $A = 1320 \text{ m}^2$

1.2.9

- a) $44,4^\circ$ b) $A = 14,7 \text{ cm}^2$

1.2.10

- a) $\angle A = 46,6^\circ$ b) $A = 11,6 \text{ m}^2$

1.2.11

- a) cosinussetningen først
 b) sinussetningen først,
 kan bli to løsninger
 c) cosinussetningen først

1.2.12

$$3,0 \text{ m og } 4,2 \text{ m}$$

1.2.13

$$14,4 \text{ cm og } 22,0 \text{ cm}$$

1.2.14

- a) 120° b) $141,8 \text{ cm}$

1.2.15

$$36,9^\circ, 53,1^\circ, 90^\circ$$

1.2.16

$$x = 5,0$$

1.2.17

- a) $\angle B_1 = 126,1^\circ, \angle B_2 = 53,9^\circ$
 b) $\angle C_1 = 24,9^\circ, \angle C_2 = 97,1^\circ$
 $AB_1 = 5,2 \text{ cm}, AB_2 = 12,3 \text{ cm}$

1.2.18

$$AB_1 = 7,1 \text{ cm}, \angle B_1 = 131,5^\circ,$$

$$\angle C_1 = 26,5^\circ$$

$$AB_2 = 15,1 \text{ cm}, \angle B_2 = 48,5^\circ,$$

$$\angle C_2 = 109,5^\circ$$

1.2.19

- a) ingen løsning
 b) én løsning:
 $\angle B = 90^\circ, AB = 9,2 \text{ cm}$
 c) to løsninger:
 $\angle B_1 = 123,6^\circ, AB_1 = 5,3 \text{ cm}$
 $\angle B_2 = 56,4^\circ, AB_2 = 12,0 \text{ cm}$
 d) én løsning:
 $\angle B = 27,0^\circ, AB = 18,5 \text{ cm}$

1.2.20

$$42,3^\circ, 54,6^\circ, 83,1^\circ$$

1.2.21

$$AB_1 = 12,3 \text{ cm}, \angle B_1 = 51,3^\circ,$$

$$\angle C_1 = 91,7^\circ$$

$$AB_2 = 3,0 \text{ cm}, \angle B_2 = 128,7^\circ,$$

$$\angle C_2 = 14,3^\circ$$

1.2.22

- a) $\sqrt{2}$
 b) $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

1.2.23

- a) $BC = 6 \text{ cm}$
 b) $\angle B = 48,6^\circ \vee \angle B = 131,4^\circ$
 c) $6 \text{ cm} < BC < 12 \text{ cm}$

1.2.24

- a) $\angle A = 80,1^\circ, \angle C = 31,9^\circ,$
 $b = 14,4$
 b) $\angle A = 32,4^\circ, \angle B = 35,9^\circ,$
 $\angle C = 111,7^\circ$
 c) $\angle C = 92^\circ, a = 3,7 \text{ cm},$
 $b = 5,2 \text{ cm}$

1.2.25

$$A = \frac{5}{2} r^2 \cdot \sin 72^\circ$$

1.2.26

$$A = 624 \text{ m}^2$$

1.2.27

b) $BD = 12,2$, $A = 36,4$

c) én trekant for

$x = 11,1 \vee 12,2 \leq x < 26,2$

to trekanter for

$11,1 < x < 12,2$

1.2.28

a) $AC = 6,0$ cm, $BC = 5,2$ cm,

$A = 14,7$ cm²

b) $A = 6,0$ cm²

R 1.1

a) $x = 41,8^\circ \vee x = 138,2^\circ$

b) $x = 138,6^\circ \vee x = 221,4^\circ$

c) $x = 74,1^\circ \vee x = 254,1^\circ$

d) $x = 210^\circ \vee x = 330^\circ$

e) $x = 19,5^\circ \vee x = 160,5^\circ$

f) $x = 59,0^\circ \vee x = 239,0^\circ$

R 1.2

$\angle C = 48,6^\circ \vee \angle C = 131,4^\circ$

R 1.3a) f.eks. $PR = 3$ cm og $QR = 8$ cm

b) $PQ = 6,6$ cm c) $h = 2,9$ cm

R 1.4

a) $\angle B = 31,4^\circ$, $\angle C = 38,6^\circ$,
 $BC = 10,1$

b) $A = 17,6$ c) 3,5

R 1.5

(3,7, 2,8)

R 1.6

a) $AB = 15,1$, $\angle A = 37,6^\circ$

b) $A = 36,8$ c) 7,4

R 1.7Ja, $v = 55,7$ km/h**R 1.8**a) Dersom $\angle C > \angle A$, må $AB > BC$.

b) $AB = 8,5$ cm, $BC = 9,6$ cm,

$\angle B = 102,6^\circ$, $\angle C = 35,4^\circ$

R 1.9

$PB = 4,4$ km

R 1.10

a) 4,6 km b) $v = 27,5^\circ$

R 1.11

b) $AB = 8 \sin x \cos x$, $CD = 4 \cos^2 x$

R 1.12

21,4 m

R 1.13 $BC < 4,0$ cm: ingen løsning $BC = 4,0$ cm: én løsning $4,0 \text{ cm} < BC < 7,0$ cm: to løsninger $BC > 7,0$ cm: én løsning**R 1.14**

a) $BC = 38$ km b) 7,6 km

R 1.15

a) $BC = 6,9$ cm, $\angle B = 75,2^\circ$,
 $\angle C = 34,8^\circ$

b) $CD = 6,7$ cm

2 Likninger og ulikheter**2.1.1**

a) $x = 2,5$ d) $x = -3 \vee x = -\frac{1}{2}$

b) $x = \frac{8}{3}$ e) $x = 5,56 \vee x = 9,44$

c) $x = \frac{4}{3}$

2.1.2

a) $x = 0 \vee x = 4$ b) identitet

2.1.3

a) $x = 3 \vee x = -3$ b) $x = -2$

2.1.4

a) $x = -4$ c) $x = 3$

b) $x = -1$ d) $x = 5 \vee x = -2$

2.1.5

a) \Leftrightarrow b) \Rightarrow c) \Leftarrow d) \Leftrightarrow

2.1.6

a) \Rightarrow b) \Leftarrow d) \Leftrightarrow

2.1.8

a) $x = 3$ d) $x = 25$

b) $x = 6$ e) $x = -\frac{7}{2} \vee x = 0$

c) $x = 4$

2.1.9

a) $x = 12$ c) $x = 3$

b) $x = 5$ d) $x = 3$

2.1.13

a) $x = 3$ b) $x = 3$

2.1.14

a) $x = 25$ d) $L = \emptyset$

b) $x = -\frac{7}{2} \vee x = 0$ e) $L = \emptyset$

c) $x = 24$

2.1.16

a) $L = \emptyset$ d) $x = -4 \vee x = 5$

b) $x = 5$ e) $L = \emptyset$

c) $x = 8$

2.1.17

a) $x = -3 \vee x = 3$

b) $x = 3$

d) sirkel, $S(0, 0)$ og $r = 5$

2.1.18

c) $b > 2$

d) $b < \frac{3}{2}$ og $b = 2$

e) $\frac{3}{2} \leq b < 2$

2.1.19

b) $x = 0 \vee x = 3 \vee x = 4$